10/12/19

$T: V^n \to W^m$ (T, S, S') πίνακας

S βάσεις S'

$T': V^n \to W^m$ (T', S, S')

S βάσεις S'

$(T+T'): V^n \to W^m$ $(T+T', S, S') = (T, S, S') + (T', S, S')$

S βάσεις S'

$T: V^n \to W^m$ (T, S, S')

S βάσεις S'

$T': W^m \to Z^k$ $(T' S' S'')$

S' βάσεις S''

$T' \circ T: V^n \to Z^k$ $(T' T, S, S'')$ $(T' \circ T, S, S'') = (T' S' S'')(T, S, S')$

S βάσεις S''

$(T' \circ T\, S S'') = (T' S' S'')(T S S')$

Δηλαδή ο πίνακας της σύνθεσης γρ. απεικονίσεων ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων

π.χ. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

SOS $T(x,y,z) = (x-y,\ x+y+z,\ 2x+z)$

α) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις $S = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$T(1,0,0) = (1,1,2) = 1(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$T(0,1,0) = (-1,1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(0,0,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$$(T S S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

β) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις

$S' = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,-2))$

$S'' = ((1,1,2),(-1,1,0),(0,0,1))$

$T(1,0,0) = (1,1,2) = 1(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(0,1,0) = (-1,1,0) = 0(1,1,2) + 1(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$T\underbrace{(1,1,-2)}_{\in \ker T} = (0,0,0) = 0(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$$T(S' S'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

γ) Εξετάστε αν οι πίνακες που βρήκατε συνδέονται μεταξύ τους

$$(TSS) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(TS'S'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\ S \arrow[r, "(TSS)"] \arrow[d, "(1,SS')"'] & S \\ S' \arrow[r, "(TS'S'')"'] & S'' \arrow[u, "(1,S'',S)"'] \end{tikzcd}$$

$T = 1_{\mathbb{R}^3} \cdot T \cdot 1_{\mathbb{R}^3}$

$$(1 \cdot T \cdot 1, S, S) = (1, S'', S) \cdot (T, S', S'')(1, S, S')$$

$$T = 1_{\mathbb{R}^3} \circ T \cdot 1_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (T, S, S) = (1\,T\,1, S, S)$$
$$= (1, S'', S)(T, S', S'')(1, S, S')$$

δ) Να βρεθούν οι πίνακες αλλαγής βάσης

$1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

S βάσεις S'

$$(1,0,0) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + \gamma(1,1,-2)$$
$$= 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(1,1,-2)$$

$$(0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(1,1,-2)$$

$$(0,0,1) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + \gamma(1,1,-2)$$
$$= \frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,-2)$$

$$(1,S,S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

S'' $\quad S$ Βάσεις

$(1,1,2) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$(-1,1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$$(1,S'',S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T,S,S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (T\,S'S'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τελικά οι πίνακες συνδέονται ως εξής

$$\overset{(TSS)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{(1S''S)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{(TS'S'')}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{(1SS')}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Ker T

$T(x,y,z) = (x-y,\ x+y+z,\ 2x+z)$

$= (0,0,0)$

$x = y$

$x+y+z=0 \qquad x+y+z=0 \Rightarrow \cancel{y+y-2y=0}$

$2x = -z \Rightarrow z = -2x = -2y$

$\operatorname{Ker}T = \{(y,y,-2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-2) \rangle$

Πόρισμα

Μια γραμ. απεικ. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας της T ως προς κάποιες βάσεις είναι αντιστρέψιμος.

(rank: διάσταση πίνακα)

Απόδειξη

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (T S S')$

S βάσεις S'

T ισομορφισμός ($1-1$, επί $\Leftrightarrow \ker T = \{\bar{0}\}$, επί)

$\exists\, T': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε $T' T = 1$ και $T \cdot T' = 1$

$T' = T^{-1}$

$(T, S, S') \oplus (T', S', S)$

$(\underbrace{T' T}_{1}, S, S) =$ Ταυτοτικός Πίνακας $I_{n\times n}$ $\quad T: S \to S' \quad T': S' \to S$

$(T T' S' S') =$ Ταυτοτικός

Δηλαδή

$(T'T, S, S) = (T' S' S)(T S S') = I_{n\times n}$

$(T S S')(T' S' S) = I_{n\times n}$

Άρα οι πίνακες $\oplus$ είναι αντιστρέψιμοι

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $\oplus$ είναι αντιστρέψιμοι και δείχνουμε ότι ο T είναι ισομορφισμός

Πόρισμα

Για να εξετάσουμε αν μια γρ. απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός βρίσκουμε τον πίνακα της ως προς κάποιες βάσεις και εξετάζουμε αν ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο ταυτοτικός

π.χ Δίνεται η απεικόνιση $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ και οι βάσεις
$S(1+x^3, x, x+x^3, x^2+x^3)$ και $S' = (1, x, x^2, x^3)$
Ο πίνακας της T ως προς τις προηγούμενες βάσεις είναι ο

$$(T\,S\,S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

α) Να εξεταστεί αν η T είναι $\cong$
β) Να βρεθεί ο τύπος της T
γ) Να βρεθεί η εικόνα του $1-2x+3x^2$

α)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Άρα η απεικ. είναι ισομορφισμός

$T(1+x^3) = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0x^2 + 1\cdot x^3$
$T(x) = 0\cdot 1 - 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3$
$T(x+x^3) = 0\,1 + 1\cdot x + 0x^2 + 0x^3$
$T(x^2+x^3) = 0\,1 + 1\cdot x + 3x^2 - 1\cdot x^3$
Θέτουμε
$T(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)$

10/12/19

$a+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3=\kappa(1+x^3)+\lambda x+\mu(x+x^3)+\nu(x^2+x^3)$

$a=\kappa \qquad \boxed{\kappa=a}$

$\beta=\lambda+\mu \qquad \Rightarrow \lambda=\beta-\mu \quad \Rightarrow \boxed{\lambda=\beta-\delta+a+\gamma}$

$\gamma=\nu \qquad \boxed{\gamma=\nu}$

$\delta=\kappa+\mu+\nu \qquad \Rightarrow \delta=a+\mu+\gamma \Rightarrow \boxed{\mu=\delta-a-\gamma}$

$a+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3=a(1+x^3)+(\beta-\delta+a+\gamma)x+(\delta-a-\gamma)(x+x^3)+\gamma(x^2+x^3)$

$T(a+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\overset{\text{γραμ.}}{=}aT(1+x^3)+(a+\beta+\gamma-\delta)T(x)+(\delta-a-\gamma)T(x+x^3)+$
$\gamma T(x^2+x^3)\overset{(++)}{=}$

$$\left.\begin{aligned}T(1+x^3)&=1+x^3\\ T(x)&=-x+x^3\\ T(x+x^3)&=x\\ T(x^2+x^3)&=x+3x^2-x^3\end{aligned}\right\}(++)$$

$T(a+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)=a(1+x^3)+(a+\beta+\gamma-\delta)(-x+x^3)+(\delta-a-\gamma)(x)+$
$\gamma(x+3x^2-x^3)$
$=a+(-a-\beta-\gamma+\delta+\delta-a-\gamma+\gamma)\cdot x+3\gamma x^2+$
$(a+a+\beta+\gamma-\delta-\gamma)x^3=$
$=a+(-2a-\beta-\gamma+2\delta)x+3\gamma x^2+(2a+\beta-\delta)x^3.$

$T(\underset{a}{1}\underset{\beta}{-2}x+\underset{\gamma}{3}x^2)=1+(-2+2-3)x+9x^2=1-3x+9x^2$

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ γραμ.

$\dim\ker T=\kappa \Rightarrow \dim \operatorname{Im}T=\dim T(\mathbb{R}^n)=n-\kappa$

Βρες βάση του $\ker=\langle v_1,\dots,v_\kappa\rangle$

Θέλουμε $n-\kappa$ γραμ. ανεξ. ώστε να την κάνουμε βάση του $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \langle v_1', v_2', \dots, v_{n-k}', v_1, \dots, v_k \rangle$ όλα γραμ. ανεξ.

$S = (v_1', v_2', \dots, v_{n-k}', v_1, \dots, v_k)$

$T(\mathbb{R}^n) = \langle T(v_1'), T(v_2'), \dots, \overset{0}{T(v_{n-k}')}, \overset{0}{T(v_1)}, \dots, \overset{0}{T(v_k)} \rangle$

$= \langle T(v_1'), T(v_2'), \dots, T(v_{n-k}') \rangle$ βάση της εικόνας

$w_1 = T(v_1')$
$w_2 = T(v_2')$
$\vdots$
$w_{n-k} = T(v_{n-k}')$ } γρ. ανεξ. } Τα επεκτείνω σε βάση του $\mathbb{R}^m$

w_{n-k+1}
$\vdots$
w_m $S' = (w_1, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_m)$

Να βρώ τον πίνακα της T ως προς αυτές τις βάσεις (TSS')

$T(v_1') = 1 \cdot w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$

$T(v_2') = 0w_1 + 1w_2 + \dots + 0w_m$

$\vdots$

$T(v_{n-k}') = 0w_1 + 0w_2 + \dots + 1w_{n-k} + 0w_{n-k+1} + \dots + 0w_m$

$T(v_1) = 0w_1 + \dots + 0w_m$

$\vdots$

$T(v_k) = 0w_1 + \dots + 0w_m$ } στοιχεία του πυρήνα

$$(TSS') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} *$$

$\uparrow$
$n-k$

$\text{rank}(TSS') = n - k = n - \dim \text{Ker}\, T$

Θεώρημα

Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γρ. απεικ. με $\dim \ker T = k$. Τότε υπάρχουν βάσεις S του $\mathbb{R}^n$ και S' του $\mathbb{R}^m$ ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές να έχει μορφή *